文章编号:1000-4939(2024)01-0200-06

大高宽比矩形腔体侧向正弦加热下对流扰动的成长和传热特性

宁利中[1],李开继[2],宁碧波[3],田伟利[4]

(1. 西安理工大学省部共建西北旱区生态水利国家重点实验室,710048 西安;2. 中交第二公路工程局有限公司,710065 西安;3. 嘉兴学院建筑工程学院,314001 嘉兴;4. 上海大学建筑系,200444 上海)

摘 要:为了研究矩形腔体侧向正弦周期加热条件下对流扰动的成长和传热特性,本研究对流体力学方程组进行了数值模拟。结果表明:随着格拉晓夫数 Gr 的增加,对流扰动的最大振幅 A_{max} 的成长率变大,线性成长阶段的时间变短。对于高宽比 $A = 10$,腔体宽度 $d = 2$ cm 的腔体,普朗特数 $Pr = 6.949$ 的流体,对流扰动的成长率 γ_m 随着格拉晓夫数 Gr 变化的经验式为 $\gamma_m = 9 \times 10^{-8} Gr^{1.2343}$;对于高宽比 $A = 10$、腔体宽度 $d = 6$ cm 的腔体,普朗特数 $Pr = 0.703$ 的流体,成长率 γ_m 随着格拉晓夫数 Gr 的变化关系式为 $\gamma_m = 8 \times 10^{-4} Gr^{0.52}$。当 $Pr = 0.0272$ 时,热壁面平均努塞尔数 $\overline{Nu}$ 和格拉晓夫数 Gr 的关联式为 $\overline{Nu} = 0.00002 Gr^{1.17}$;当 $Pr = 6.949$ 时,$\overline{Nu} = 0.00024 Gr^{1.05}$。随着格拉晓夫数 Gr 数增加,右壁面的传热能力增强。

关键词:矩形腔体;侧向正弦周期加热;对流扰动;成长率;传热能力

中图分类号:O357 **文献标志码:**A **DOI:**10.11776/j.issn.1000-4939.2024.01.021

Growth of convective disturbances and heat transfer characteristics under sinusoidal heating from side

NING Lizhong[1], LI Kaiji[2], NING Bibo[3], TIAN Weili[4]

(1. State Key Laboratory of Eco-hydraulics in Northwest Arid Region of China, Xi'an University of Technology, 710048 Xi'an, China; 2. CCCC Second Highway Engineering CO. LTD., 710065 Xi'an, China; 3. College of Civil Engineering and Architecture, Jiaxing University, 414001 Jiaxing, China; 4. Department of Architecture, Shanghai University, 200444 Shanghai, China)

Abstract: In order to study the growth of convective disturbance and heat transfer characteristics of rectangular cavity with sinusoidal periodic heating, the hydrodynamic equations were numerically simulated. The results showed that with the increase of Grashof number Gr, the growth rate of maximum amplitude A_{max} of convective disturbance increases while the time of linear growth phase decreases. For a cavity with aspect ratio $A = 10$ and a width $d = 2$ cm and for the fluid with Prandtl number $Pr = 6.949$,

收稿日期:2021-11-28 **修回日期:**2022-07-19
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 10872164);西北旱区生态水利国家重点实验室基金资助项目(No. 2017ZZKT-2)
通信作者:宁利中,教授。E-mail: ninglz@xaut.edu.cn
引用格式:宁利中,李开继,宁碧波,等. 大高宽比矩形腔体侧向正弦加热下对流扰动的成长和传热特性[J]. 应用力学学报,2024,41(1):200-205.
NING Lizhong, LI Kaiji, NING Bibo, et al. Growth of convective disturbances and heat transfer characteristics under sinusoidal heating from side [J]. Chinese journal of applied mechanics, 2024, 41(1):200-205.

the empirical formula of the growth rate γ_m of convective disturbance varying with Graschof number is $\gamma_m = 9\times10^{-8}Gr^{1.2343}$. For a cavity with $A = 10$ and $d = 6$ cm and for the fluid with $Pr = 0.703$, the empirical formula of the growth rate γ_m varing with Graschof number is $\gamma_m = 8\times10^{-4}Gr^{0.52}$. At $Pr = 0.0272$, the correlation between the average Nusselt number $\overline{Nu}$ of the hot wall and Graschof number is $\overline{Nu} = 0.00002Gr^{1.17}$; at $Pr = 6.949$, the correlation is $\overline{Nu} = 0.00024Gr^{1.05}$. The heat transfer capacity of the right wall increases with the increase of Graschof number.

Key words: rectangular cavity; sinusoidal periodic heating from side; convective disturbance; growth rate; heat transfer capacity

从底部加热的矩形腔体内的 Rayleigh-Bénard 对流已经有一百多年的历史[1-2]。对它的研究由最初的实验、理论分析发展到现在的基于流体力学方程组的数值模拟[3-13],一直吸引着大量的研究者,并已经获得了很大的进展。特别在混合流体分离比为负值情况下发现了行波现象,导致了对该问题的广泛深入研究。不同结构的局部行波[4-9]、摆动行波[10-11]、具有缺陷的行波[3]、双局部行波的对流斑图[12]、局部行波的局部结构与周期性[13]等一系列现象已被发现。在均匀加热的基础上,为适用实际应用中热源不均匀波动的特点,科研人员进一步考虑了底部局部加热和底部周期加热对对流斑图的影响,以及水平流动对对流结构及斑图形成的影响[9,13]。这些研究都是基于 Rayleigh-Bénard 对流的基本模型,揭示了非平衡对流系统的复杂而丰富的动力学特性。

对于矩形腔体,如果从一侧加热,这将形成另外一种自然对流系统。文献[14]最早考虑了这样一个系统。文献[15]对侧向加热的对流系统进行了实验研究。文献[16-20]研究了侧向加热的对流系统中的非恒定自然对流、传热特性、温度振动、垂直边界层中的对流不稳定性和双层结构。文献[21]进一步探讨了侧向加热的对流系统中的动力学特性。文献[22]回顾了侧加热腔内的自然对流的研究,综述了其进展。对侧向加热的对流系统的研究既有理论价值,同时又具有实际应用意义。大部分对侧向加热的对流系统的研究都是基于小高宽比一侧均匀加热腔体。为了探讨侧向局部周期加热及侧壁面正弦周期加热对腔体内对流结构的影响,文献[23-28]进行了有益的探索。发现加热方式明显影响对流斑图的结构和对流斑图的形成。文献[29]对倾斜腔体对流进行了研究,并发现了一种对流斑图,它有着许多不同的动力学特性。有必要研究较大高宽比腔体侧壁面正弦周期加热对对流扰动的成长和传热特性的影响。

本研究通过对流体力学方程组的数值模拟,研究了矩形腔体侧向正弦周期加热条件下对流扰动的成长和传热特性。针对高宽比 $A = 10$,腔体宽度 $d = 2$ cm 的腔体,普朗特数 $Pr = 6.949$ 的流体,和高宽比 $A = 10$、腔体宽度 $d = 6$ cm 的腔体,普朗特数 $Pr = 0.703$ 的流体,探讨其对流扰动的成长率 γ_m 随着格拉晓夫数 Gr 变化的经验式。发现随着格拉晓夫数 Gr 的增加,对流扰动的最大振幅 A_{max} 的成长率变大,线性成长阶段的时间变短。建立了 $Pr = 0.0272$ 和 $Pr = 6.949$ 时,热壁面平均努塞尔数 $\overline{Nu}$ 和格拉晓夫数 Gr 的关联式。发现随着格拉晓夫数 Gr 数增加,右壁面的传热能力增强。

1　数学物理模型

1.1　流体力学方程组

基于 Boussinesq 假定,描述侧向加热对流问题的流体力学方程组可以表述为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{U} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t} + (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{U} = -\nabla\frac{p}{\rho_0} + \nu\nabla^2\boldsymbol{U} - \alpha(T - T_0)\boldsymbol{g} \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)T = \kappa\nabla^2 T \tag{3}$$

式中:$\boldsymbol{U}(u,0,w)$ 为速度矢量场;T 为温度;p 为压强;ν 为运动黏性系数;t 为时间;κ 为热扩散系数,$\kappa = \frac{\lambda}{\rho_0 C_p}$,$\lambda$ 为导热系数,C_p 为比热;ρ 为密度;$\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_y$,$g$ 为重力加速度;$\boldsymbol{e}_y$ 表示 y 轴单位矢量,平行于 y 轴向上;α 为体积膨胀系数,$\alpha = -\frac{1}{\rho_0}\cdot\frac{\rho(T,p)}{T}$,下标 0 表示相应物理量的参考值。

1.2 边界条件与初始条件

下面给出速度及温度的边界条件。

$$\begin{cases}当\ y=0,\Gamma\ 时,u=w=0\\ 当\ x=0,d\ 时,u=w=0\\ 当\ y=0,\Gamma\ 时,\partial T/\partial y=0\\ 当\ x=0\ 时,T=T_L\\ 当\ x=d\ 时,T=T_R\end{cases}$$

式中:u、w 分别表示水平流速、垂向流速;Γ 为计算区域高度;d 为计算区域宽度;T_L 为左壁面温度;T_R 为右壁面温度。

初始流速条件为 $u = w = 0$,初始温度为边壁面突然加温。

系统由以下参数来控制,即:腔体的高宽比 $A = \Gamma/d$;格拉晓夫数 $Gr = \dfrac{\alpha g d^3 \Delta T}{\nu^2}$;普朗特数 $Pr = \nu/\kappa$。为讨论方便,对腔体尺寸进行量纲归一化处理,即 $Y = y/d$, $X = x/d$。

1.3 加热条件

左壁面温度保持恒定,右壁面温度 T_R 周期变化,即

$$T_R = T_L + \frac{\Delta T'}{2}\sin\left(\frac{\pi}{n}y\right) \tag{4}$$

$$T_0 = \frac{1}{2}(T_L + T_{Rmax}) \tag{5}$$

式中:$\Delta T' = T_{Rmax} - T_L$,$T_{Rmax}$ 表示右壁面最大温度;n 为系数。

图1是腔体高宽比 $A = 10$ 时左右壁面的温度分布。

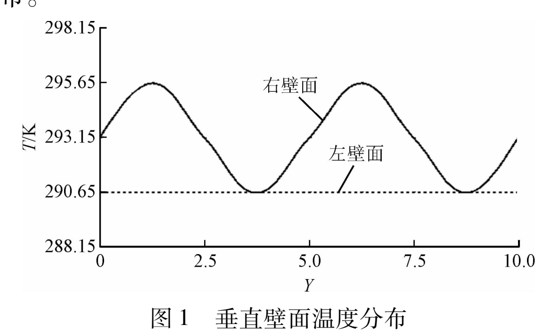


图1 垂直壁面温度分布

Fig. 1 Temperatures along the vertical walls

1.4 数值方法

利用有限容积法对流体力学方程组进行了离散,采用SIMPLE算法求解流体方程组,对流项采用二阶迎风格式,时间项采用一阶隐格式。计算区域使用均匀交错网格系统,网格尺寸分为 $\Delta x = \Delta y = d/20$ 和 $\Delta x = \Delta y = d/30$ 两种。文献[24]在 $Gr = 5.7004 \times 10^4$ 情况下,当 $\Delta x = \Delta y = d/20$ 时,右壁面努塞尔数的平均值 $\overline{Nu} = 0.0331$;当 $\Delta x = \Delta y = d/30$ 时,$\overline{Nu} = 0.0333$,得到 $\overline{Nu}$ 两者的误差为0.604%,发现特征量很接近。因此,采用 $\Delta x = \Delta y = d/20$。时间步长为0.01s。在每个时间步,如果节点余量绝对值的最大值小于 10^{-9},并且同一时间步内前后两次迭代计算的相对误差小于 10^{-4},认为收敛。本研究数值模拟采用Fluent软件。

2 侧向正弦加热下对流扰动的成长和传热特性

2.1 侧向正弦加热下对流扰动的成长

2.1.1 对流扰动的成长率

对于侧向周期加热的矩形腔体,突然加热后观察腔体中对流扰动的成长,这时,对流扰动的最大振幅 A_{max} 可表示为[3]

$$A_{max} \propto \exp(\gamma_m t) \tag{6}$$

式中:γ_m 是初始小扰动成长阶段的成长率;t 是扰动时间。由式(6)可以看出,随着扰动时间的增加,对流扰动的最大振幅 A_{max} 指数成长。对流扰动的成长阶段最大振幅 A_{max} 的成长率可被定义为

$$\gamma_m = \mathrm{d}(\ln A_{max})/\mathrm{d}t \tag{7}$$

取腔体中铅垂方向速度场最大值为对流最大振幅。在对流扰动成长的初始阶段最大振幅 A_{max} 的成长率应该为常数。

2.1.2 普朗特数 $Pr = 6.949$ 时对流扰动的成长

对于高宽比 $A = 10$,腔体宽度 $d = 2$ cm 的腔体,普朗特数 $Pr = 6.949$ 的流体,侧向正弦周期加热条件下,选择3个格拉晓夫数 Gr 从初始状态开始计算,观察腔体中对流扰动的成长。

图2给出了不同格拉晓夫数 Gr 情况下对流扰动成长初始阶段的最大振幅 A_{max} 随着时间 t 的变化。在格拉晓夫数 $Gr = 57\,004$ 的情况下,时间 $t \leqslant 14$ s 时,最大振幅 A_{max} 随着时间 t 线性变化。直线的斜率是一个常数。也就是说,对流扰动的成长阶段最大振幅 A_{max} 的成长率是一个常数。当时间 $t \geqslant 14$ s 后,最大振幅 A_{max} 随着时间 t 的变化偏离直线,最大振幅 A_{max} 的增加变小。系统进入非线性阶段。对于不同的格拉晓夫数,直线的斜率是不同的常数,也就是

说,对流扰动的成长阶段最大振幅 A_{max} 的成长率不一样。随着格拉晓夫数的减小,对流扰动的成长阶段最大振幅 A_{max} 的成长率变小,线性成长阶段的时间变长。通过不同格拉晓夫数情况下,线性成长阶段直线的斜率可获得相应的成长率。图 3 给出了成长率 γ_m 随格拉晓夫数 Gr 的变化。可以看出,对流扰动的成长阶段最大振幅 A_{max} 的成长率随着格拉晓夫数 Gr 的增加而增加。对图 3 的资料进行拟合分析,可获得成长率 γ_m 和格拉晓夫数 Gr 的经验式为 $\gamma_m = 9 \times 10^{-8} Gr^{1.2343}$,拟合可决系数 $R^2 = 0.963$。

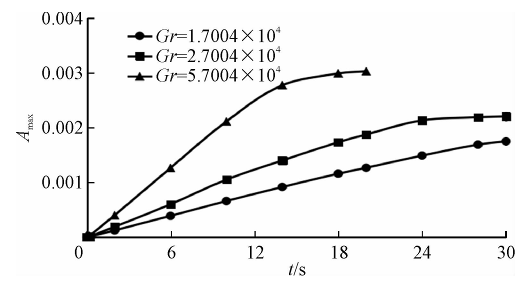


图 2　普朗特数 $Pr = 6.949$ 时最大振幅随时间的变化

Fig. 2　Variation of the maximum amplitude with time at $Pr = 6.949$

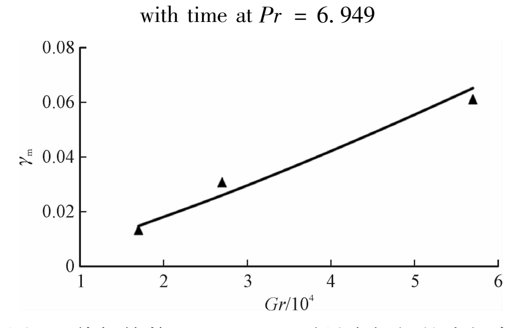


图 3　普朗特数 $Pr = 6.949$ 时最大振幅的成长率 γ_m 随格拉晓夫数 Gr 的变化

Fig. 3　Variation of the growth rate γ_m of the maximum amplitude with Gr at $Pr = 6.949$

2.1.3　普朗特数 $Pr = 0.703$ 时对流扰动的成长

对于高宽比 $A = 10$,考虑到 Boussinesq 假定,腔体宽度 $d = 6$ cm 的矩形腔体,普朗特数 $Pr = 0.703$ 的流体,侧向正弦周期加热条件下,选择 4 个格拉晓夫数 Gr 从初始状态突然加热开始计算,观察腔体中对流扰动的成长。

普朗特数 $Pr = 0.703$ 时不同格拉晓夫数 Gr 情况下对流扰动初始成长阶段的最大振幅 A_{max} 随着时间 t 的变化如图 4 所示。在格拉晓夫数 $Gr = 13\,480$ 的情况下,时间 $t \leqslant 14$ s 时,对流最大振幅 A_{max} 随着时间 t 线性变化。线性变化的直线斜率是 1 个常数。也就是说,对流扰动的初始成长阶段成长率是 1 个常数。当时间 $t \geqslant 14$ s 后,最大振幅 A_{max} 随着时间 t 偏离直线变化,最大振幅 A_{max} 的增加变小。对流系统进入非线性范围。当格拉晓夫数 $Gr = 23\,480$, $53\,480$, $67\,398$ 时,对流系统最大振幅由线性转变为非线性成长的时间 $t = 10$ s,8 s,6 s。可见,随着格拉晓夫数的增加,对流扰动的最大振幅线性成长阶段的时间变短。同时可以发现,随着格拉晓夫数的增加,对流最大振幅 A_{max} 随着时间 t 直线变化的角度变大,直线的斜率变大,也就是说,对流扰动的最大振幅 A_{max} 的成长率变大。通过不同格拉晓夫数情况下,线性成长阶段直线的斜率可获得相应的成长率。线性成长阶段的成长率 γ_m 随格拉晓夫数 Gr 的变化如图 5 所示。可以看出,对流扰动的成长率随着格拉晓夫数 Gr 的增加而增加。对图 5 的资料进行拟合分析,可获得对流扰动的成长率 γ_m 随着格拉晓夫数 Gr 的变化关系式为 $\gamma_m = 8 \times 10^{-4} Gr^{0.52}$,拟合可决系数 $R^2 = 0.9077$。

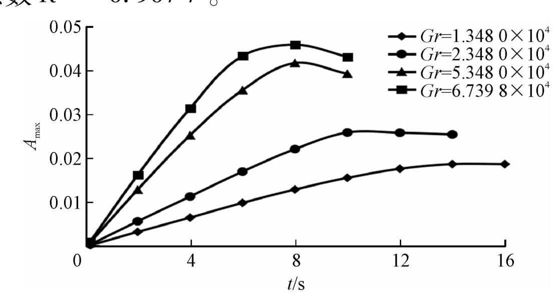


图 4　普朗特数 $Pr = 0.703$ 时最大振幅随时间的变化

Fig. 4　Variation of the maximum amplitude with time at $Pr = 0.703$

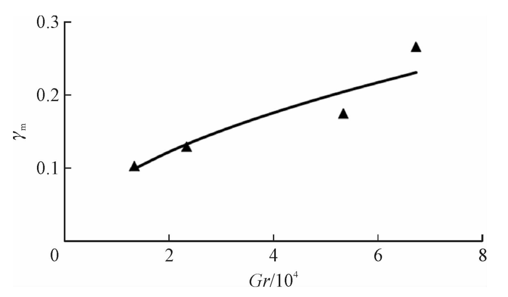


图 5　普朗特数 $Pr = 0.703$ 时最大振幅的成长率 γ_m 随格拉晓夫数 Gr 的变化

Fig. 5　Variation of the growth rate γ_m of the maximum amplitude with Gr at $Pr = 0.703$

2.2　热壁面传热能力

正弦周期加热情况下,普朗特数 $Pr = 6.949$ 和 $Pr = 0.0272$ 时热壁面平均努塞尔数 Nu 的比较如图 6 所示。可知,对于给定的 Pr,随着格拉晓夫数 Gr 的增大,热壁面平均努塞尔数 Nu 增大,热壁面的传热能力越强。对于不同 Pr, Pr 越大,热壁面平均

努塞尔数 Nu 增大,热壁面的传热能力越强。对于图 6 中数据进行拟合分析，给出了 2 种 Pr 下热壁面平均努塞尔数 Nu 随着格拉晓夫数 Gr 变化的关系式,可决系数及应用条件如表 1 所示。

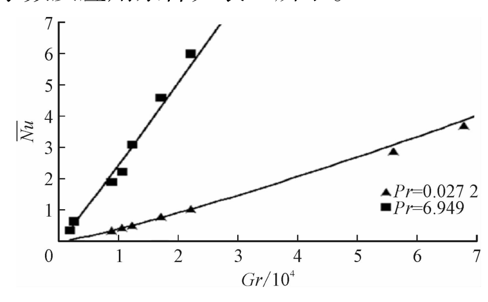


图 6 不同 Pr 时的传热能力

Fig. 6 The heat transfer capacity for different Pr

表 1 右壁面平均努塞尔数随着格拉晓夫数 Gr 变化的关系式

Tab. 1 Correlations for the average Nusselt number on the right wall with Gr

传热关联式	可决系数	应用条件
$\overline{Nu} = 0.000\,02Gr^{1.17}$	$R^2 = 0.993\,6$	$8.75 \times 10^3 \leqslant Gr \leqslant 6.78 \times 10^4$
$\overline{Nu} = 0.000\,24Gr^{1.05}$	$R^2 = 0.928\,4$	$1.75 \times 10^3 \leqslant Gr \leqslant 1.754 \times 10^4$

3 结 论

本研究通过对流体力学方程组的数值模拟,研究了矩形腔体侧向正弦周期加热条件下对流扰动的成长和传热特性。可以得到以下结论。

1)对于侧向正弦周期加热矩形腔体,对流扰动的最大振幅 A_{max} 的成长率随着格拉晓夫数 Gr 的增加变大,线性成长阶段的时间随着格拉晓夫数 Gr 的增加变短。

2)对于高宽比 $A = 10$,腔体宽度 $d = 2$ cm 的腔体,普朗特数 $Pr = 6.949$ 的流体,对流扰动的成长率 γ_m 随着格拉晓夫数 Gr 变化的经验式为 $\gamma_m = 9 \times 10^{-8} Gr^{1.234\,3}$;对于高宽比 $A = 10$ 、腔体宽度 $d = 6$ cm 的腔体,普朗特数 $Pr = 0.703$ 的流体,成长率 γ_m 随着格拉晓夫数 Gr 的变化关系式为 $\gamma_m = 8 \times 10^{-4} Gr^{0.52}$。

3)当 $Pr = 0.027\,2$ 时,热壁面平均努塞尔数 $\overline{Nu}$ 和格拉晓夫数 Gr 的关联式为 $\overline{Nu} = 0.000\,02Gr^{1.17}$;当 $Pr = 6.949$ 时, $\overline{Nu} = 0.000\,24Gr^{1.05}$ 。对于不同 Pr , Pr 越大,热壁面平均努塞尔数 Nu 增大,热壁面的传热能力越强。

参考文献:

[1] CROSS M C, HOHENBERG P C. Pattern formation outside of equilibrium[J]. Reviews of modern physics, 1993, 65(3): 851-1112.

[2] BODENSCHATZ E, PESCH W, AHLERS G. Recent developments in Rayleigh-Bénard convection[J]. Annual review of fluid mechanics, 2000, 32(1): 709-778.

[3] NING L Z, HARADA Y, YAHATA H. Formation process of the traveling-wave state with a defect in binary fluid convection[J]. Progress of theoretical physics, 1997, 98(3): 551-566.

[4] TARAUT A V, SMORODIN B L, LÜCKE M. Collisions of localized convection structures in binary fluid mixtures[J]. New journal of physics, 2012, 14(9): 093055.

[5] MERCADER I, BATISTE O, ALONSO A, et al. Convectons, anticonvectons and multiconvectons in binary fluid convection[J]. Journal of fluid mechanics, 2011, 667: 586-606.

[6] MERCADER I, BATISTE O, ALONSO A, et al. Travelling convectons in binary fluid convection[J]. Journal of fluid mechanics, 2013, 722: 240-266.

[7] WATANABE T, IIMA M, NISHIURA Y. Spontaneous formation of travelling localized structures and their asymptotic behaviour in binary fluid convection[J]. Journal of fluid mechanics, 2012, 712: 219-243.

[8] MERCADER I, BATISTE O, ALONSO A, et al. Convectons in periodic and bounded domains[J]. Fluid dynamics research, 2010, 42(2): 025505.

[9] 宁利中,张迪,宁碧波,等. 水平流动对周期加热的 Rayleigh-Bénard 对流的影响[J]. 力学季刊, 2019, 40(2): 353-361.
NING Lizhong, ZHANG Di, NING Bibo, et al. Influence of horizontal flow on Rayleigh-Bénard convection with periodic heating[J]. Chinese quarterly of mechanics, 2019, 40(2): 353-361 (in Chinese).

[10] 宁利中,张珂,宁碧波,等. 摆动行波的时空结构[J]. 应用力学学报, 2020, 37(4): 1623-1628.
NING Lizhong, ZHANG Ke, NING Bibo, et al. Spatial-temporal structure of undulation traveling waves[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2020, 37(4): 1623-1628 (in Chinese).

[11] ZHAO Bingxin, TIAN Zhenfu. Numerical investigation of binary fluid convection with a weak negative separation ratio in finite containers[J]. Physics of fluids, 2015, 27(7): 074102.

[12] 齐昕,宁利中,余荔,等. 双局部行波斑图的形成与时空结构[J]. 西安理工大学学报, 2016, 32(1): 110-114.
QI Xin, NING Lizhong, YU Li, et al. The formation and spatio-temporal structure of doubly localized traveling wave pattern[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2016, 32(1): 110-114 (in Chinese).

[13] 胡彪,宁利中,宁碧波,等. Poiseuille-Rayleigh-Benard 流动中局部行波的周期性[J]. 科学通报,2017,62(36):4278-4284.
HU Biao,NING Lizhong,NING Bibo,et al. Periodicity of localized traveling waves in Poiseuille-Rayleigh-Benard flow[J]. Chinese science bulletin,2017,62(36):4278-4284(in Chinese).

[14] BATCHELOR G K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures[J]. Quarterly of applied mathematics,1954,12(3):209-233.

[15] IVEY G N. Experiments on transient natural convection in a cavity [J]. Journal of fluid mechanics,1984,144:389-401.

[16] IMBERGER J,PATTERSON J. Unsteady natural convection in a rectangular cavity[J]. Journal of fluid mechanics,1980,100(1):65-86.

[17] XU F,PATTERSON J C,LEI C W. Heat transfer through coupled thermal boundary layers induced by a suddenly generated temperature difference[J]. International journal of heat and mass transfer,2009,52(21/22):4966-4975.

[18] XU F,PATTERSON J C,LEI C W. Temperature oscillations in a differentially heated cavity with and without a fin on the sidewall [J]. International communications in heat and mass transfer,2010,37(4):350-359.

[19] XU F. Convective instability of a vertical thermal boundary layer in a differentially heated cavity[J]. International communications in heat and mass transfer,2014,52:8-14.

[20] XU F,PATTERSON J C,LEI C W. On the double-layer structure of the boundary layer adjacent to a sidewall of a differentially heated cavity[J]. International journal of heat and mass transfer,2008,51(15/16):3803-3815.

[21] YAHATA H. Thermal convection in a vertical slot with lateral heating[J]. Journal of the Physical Society of Japan,1997,66(11):3434-3443.

[22] 徐丰,崔会敏. 侧加热腔内的自然对流[J]. 力学进展,2014,44(1):98-136.
XU Feng,CUI Huimin. Natural convection in a differentially heated cavity[J]. Advances in mechanics,2014,44(1):98-136(in Chinese).

[23] 李开继,宁利中,宁碧波,等. 格拉晓夫数 *Gr* 对侧向局部加热腔体内对流结构的影响[J]. 力学季刊,2016,37(1):131-138.
LI Kaiji,NING Lizhong,NING Bibo,et al. Effect of Grashof number *Gr* on convection structure of rectangular cavity heated locally from side[J]. Chinese quarterly of mechanics,2016,37(1):131-138 (in Chinese).

[24] 李开继,宁利中,宁碧波,等. 侧壁面正弦加热条件下自然对流研究[J]. 应用力学学报,2017,34(4):641-646.
LI Kaiji,NING Lizhong,NING Bibo,et al. Study on natural convection sinusoidal heating from side[J]. Chinese journal of applied mechanics,2017,34(4):641-646(in Chinese).

[25] 李开继,宁利中,王永起,等. 侧向局部加热腔体内对流时空结构的研究[J]. 应用力学学报,2016,33(3):401-406.
LI Kaiji, NING Lizhong, WANG Yongqi, et al. Spatio-temporal structure of the convection heated locally from side[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2016, 33(3): 401-406 (in Chinese).

[26] 李开继,宁利中,宁碧波,等. 侧向局部加热对流斑图的演化[J]. 力学季刊,2017,38(4):703-709.
LI Kaiji,NING Lizhong,NING Bibo,et al. Evolution of convection pattern in rectangular cell heated locally from side[J]. Chinese quarterly of mechanics,2017,38(4):703-709(in Chinese).

[27] 徐泊冰,宁利中,宁碧波,等. 周期加热对倾斜槽道对流特性的影响[J]. 西安理工大学学报,2020,36(1):59-64.
XU Bobing, NING Lizhong, NING Bibo, et al. Effect of periodic heating on convection characteristics of inclined channel[J]. Journal of Xi'an University of Technology,2020,36(1):59-64(in Chinese).

[28] 宁利中,张迪,宁碧波,等. 侧向局部加热对流的周期性[J]. 应用数学和力学,2020,41(2):125-133.
NING Lizhong,ZHANG Di,NING Bibo,et al. Periodicity of convection under lateral local heating[J]. Applied mathematics and mechanics,2020,41(2):125-133(in Chinese).

[29] 宁利中,张迪,宁碧波,等. 倾角对倾斜腔体对流的影响[J]. 水动力学研究与进展,2020,35(4):526-531.
NING Lizhong,ZHANG Di,NING Bibo,et al. Influence of inclined angle on convection in an inclined cavity[J]. Chinese journal of hydrodynamics,2020,35(4):526-531(in Chinese).

(编辑　史淑英)